Časová složitost

19 October, 2020 23:27

Otázka: $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ spočitatelná

Jak dlouho poběží program pro f?

Př: 1) f … řešení soustavy lin. rovnic nad $\mathbb{Q}$
2) f … řešení soustavy lin. rovnic nad $\mathbb{Z}$
3) f … maximalizovat počet splněných lin. rovnic nad $\mathbb{Z}$

- TS M, vstup w … $t_M(w)$ … počet kroků výpočtu M nad w, než se zastaví

$t_M : \Sigma^* \to \mathbb{N}$

- $t_M(n) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ … časová složitost M (nejhorší)

$t_M(n) = \max_{w \in \Sigma^n} t_M(w)$

Σ^n → množina řetězců délky n nad Σ.

Asymptotická složitost

- $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

def:
- $f = O(g) \iff \exists c, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\ f(n) \leq c \cdot g(n)$
- $f = o(g) \iff \lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$
- $f = \Omega(g) \iff g \in O(f)$

- $f = \omega(g) \iff g \in o(f)$

<u>Př:</u>
- $5n^2 + 3n - 27 = O(\frac{1}{2} n^2)$
- $5n^2 + 3n - 27 = o(n^3)$

$$n^3 = \omega(5n^2)$$
$$n^3 = \omega(n^2)$$
$$n^3 = \omega\left(\frac{n^2}{2}\right)$$

- $L \subseteq \Sigma^*$, rychle lze L počítat? (rozhodovat)

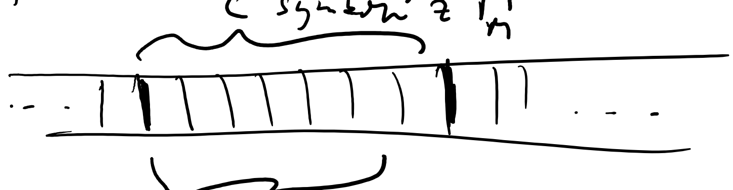
- $\forall$ TS M, pokud $t_M(n) \neq n$, pak lze sestrojit TS M' t.ž. $\forall n \in \mathbb{N}$ $t_{M'}(n) \leq t_M(n)$ & $\exists n_0$ $t_{M'}(n_0) < t_M(n_0)$ & $L(M) = L(M')$.

<u>Věta (o lineárním zrychlení):</u>

- Pro každý TS M, $\forall c \in \mathbb{N}$, $\exists$ TS M' t.ž. $L(M) = L(M')$ & $t_{M'}(n) \leq n + \frac{t_M(n)}{c}$.

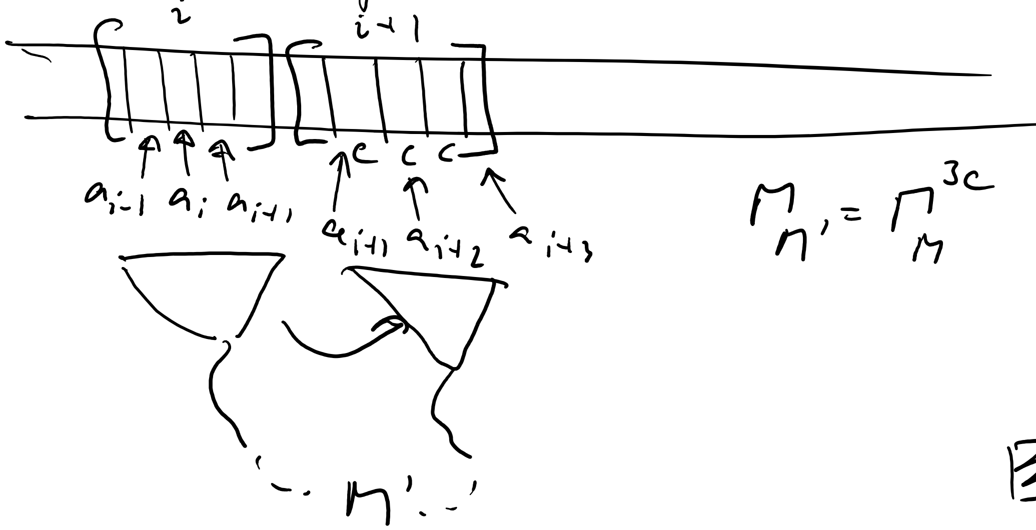
<u>Dk:</u> (idea) M' používá větší páskovou abecedu $\approx \Gamma_M^c$

c symbolů z Γ_M



$\approx$ jeden symbol z $\Gamma_{M'}$

M' má jednu pásku navíc, tam na začátku zakomprimuje vstup a pak počítá v zakomprimovaném tvaru



$\Gamma_{M'} = \Gamma_M^{3c}$

- $DTIME(t(n)) = \{ L \subseteq \Sigma^*,\ \exists$ TS M, $L(M) = L$ & M počítá v čase $O(t(n))\}$

<u>Př</u>: $Pal = \{ x\#x \ ;\ x \in \{0,1\}^* \}$

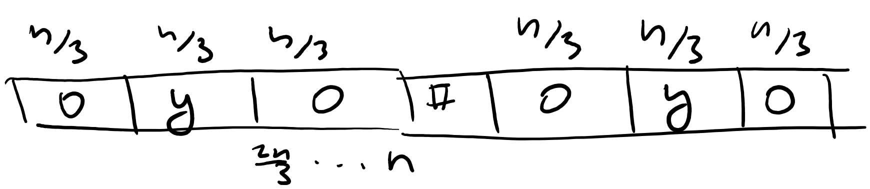
... na 2-páskovém TS lze řešit v čase $O(n)$

na 1-páskovém TS lze řešit v čase $O(n^2)$

<u>Věta</u>: Pal vyžaduje čas $\Omega(n^2)$ na 1-páskovém TS.

<u>Dk</u>: <u>Sporem</u>: Nechť M je TS t.ž. $L(M) = Pal$ a M pracuje v čase $t(n) \in o(n^2)$.

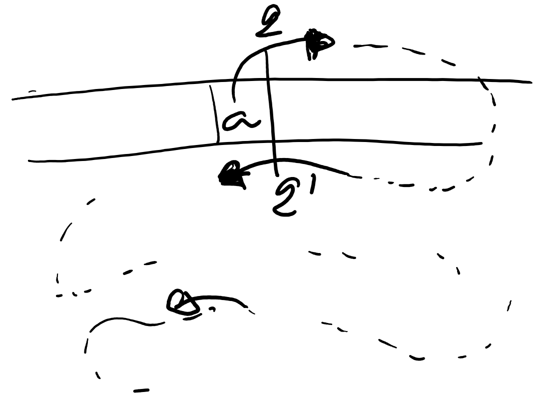
Uvažujme vstupy typu:



Vezmeme dostatečně velké n.

některá z pozic $\frac{2n}{3} \dots n$ je navštívena n

některá z pozic $\frac{2n}{3} \dots n$ je navštívena ...
méněkrát než $\frac{n}{3 \lg |Q| \times |\Gamma|}$



$(q, a) \to L/R, q'$

ze stavu q přijdu a se vrátím ve stavu q' zprava/zleva.

posloupnost $(q_1, a_1), (q_2, a_2), \dots (q_{n'}, a_{n'})$
(stav, symbol) při návštěvě dané pozice

$(|Q| \times |\Gamma|)^{n'}$ různých možností

$< 2^{n/3}$

$\Rightarrow \exists y \neq y' \in \{0,1\}^{n/3}$ t. ž. stejná posloupnost $\Rightarrow$ na vstupech

$0^{n/3} y\, 0^{n/3} \# 0^{n/3} y\, 0^{n/3}$

$0^{n/3} y'\, 0^{n/3} \# 0^{n/3} y'\, 0^{n/3}$

$0^{n/3} y\, 0^{n/3} \# 0^{n/3} y'\, 0^{n/3}$

dojde M ke stejnému výsledku $\to$ spor $\blacksquare$

<u>Věta</u>: Každý TS M pracující v čase $t(n)$ lze simulovat na 1-páskovém TS v čase $(t(n))^2$.

v čase $(t(n))^c$.

Dk: viz univerzální TS. $\boxtimes$

Pozn: Na 2-páskovém TS lze simulovat libovolný jiný TS v čase $O(t(n) \cdot \log t(n))$.

Třída P: $P = \bigcup_k \mathrm{DTIME}(n^k)$

- definice tří P nezávisí na volbě výpočetního modelu (TS / RAM / 1-páskový TS / ...)
- P ≈ efektivně řešitelné problémy

Př: 1) $L_{CONN} = \{ (G, s, t) ;$ G je graf, $s, t \in V(G)$ a existuje cesta z s to $t \}$

... alg. prohledávání grafu do šířky

$L_{CONN} \in P$

2) $F_{ST}: \Sigma^* \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$

$f(G, s, t)$ = délka nejkratší cesty z s do t

"$F \in P$" o funkcích můžeme říkat, že jsou v P.

$f \in P$

o funkcích můžeme
též říci, že jsou v P,
pokud jsou počitatelné
algoritmem pracující
v polynomiálním čase